

Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 2

Summen unabhängiger Zufallsvariabler:

Varianz der Binomialverteilung,
 \sqrt{n} -Gesetz, Chebyshev-Ungleichung und
Schwaches Gesetz der großen Zahlen

(Buch S. 50, S. 26, S74)

Die Rechnung auf der letzten Folie von Teil 1 weist direkt den Weg zum

Satz: X_1, \dots, X_n seien paarweise unabhängige reellwertige Zufallsvariable mit endlichen Erwartungswerten. Dann gilt:

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + \dots + a_n^2 \\ &+ \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i a_j \\ &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i a_j \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \end{aligned}$$

2

Die Rechnung auf der letzten Folie von Teil 1 weist direkt den Weg zum

Satz: X_1, \dots, X_n seien paarweise unabhängige reellwertige Zufallsvariable mit endlichen Erwartungswerten. Dann gilt:

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Mit $\mu_i := \mathbf{E}[X_i]$ ist nach Definition der Varianz

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \right)^2 \right]$$

Wegen der Linearität des EW ist dies

$$\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} \left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \right].$$

Die Summanden mit $i \neq j$ sind $= 0$ wegen der Produktformel (V5b2), die "Diagonalterme" ($i = j$) summieren zu $\text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]$. \square

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Satz
zusammen mit Bsp. 2 in Teil 1 ergibt sich

Die Varianz der $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung ist npq .

Das \sqrt{n} -Gesetz für die Standardabweichung

folgt aus der Additivität der Varianz unabhängiger ZV'er:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig
und identisch verteilt mit Varianz σ^2 .

Dann gilt für die Varianz

des Mittelwerts $M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$:

$$\text{Var}[M_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Das \sqrt{n} -Gesetz für die Standardabweichung

folgt aus der Additivität der Varianz unabhängiger ZV'er:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig
und identisch verteilt mit Varianz σ^2 .

Dann gilt für die Varianz

des Mittelwerts $M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$:

$$\text{Var}[M_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Man hat somit das berühmte \sqrt{n} -Gesetz:

$$\sigma_{M_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma.$$

Die Ungleichung von Chebyshev

liefert eine Quantifizierung der anschaulichen Botschaft

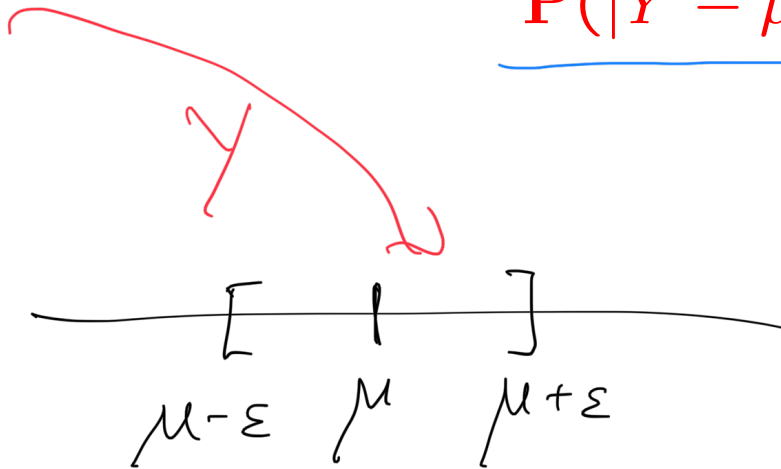
“Je weniger eine reellwertige Zufallsvariable streut,
mit um so größerer Wahrscheinlichkeit
fällt sie nahe zu ihrem Erwartungswert aus.”

Die Ungleichung von Chebyshev:

Y sei eine reellwertige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ .

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{Var}[Y]$$



Die Ungleichung von Chebyshev:

Y sei eine reellwertige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ .

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{Var}[Y]$$

Beweis:

Mit $X := (Y - \mu)^2$ ist die **Behauptung** äquivalent zu

$$\mathbf{P}(X \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}[X].$$

Das aber folgt aus der Ungleichung von Markov. \square

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{Var}[Y]$$

$$\sigma M_n = \sigma X_1 / \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen

ist eine unmittelbare Folgerung aus dem \sqrt{n} -Gesetz zusammen mit der Ungleichung von Chebyshev:

Seien X_1, X_2, \dots unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz. Dann gilt für die Mittelwerte

$$M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n):$$
$$\mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{Var}[M_n] \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

$$\mu = \mathbb{E}[M_n]$$